

Das Brückenproblem:

Zu Beginn hat eine Person x Euro. Die Person möchte n Brücken überqueren.

Das Überqueren einer Brücke kostet g Euro.

Nach dem Überqueren wird der aktuelle Geldbetrag mit dem Faktor f multipliziert.

Nach der letzten von n Überquerung bleiben genau 0 Euro übrig.

Wie hoch war der Geldbetrag x vor der ersten Überquerung?

Beispiel: $n=3, f=2, g=8 \rightarrow x=14$:

Es werden 3 Brücken überquert, eine Überquerung kostet 8 Euro, nach einer Überquerung wird der Geldbetrag mit 2 multipliziert (verdoppelt):



Start: 14 (-8) 6 (*2) 12 (-8) 4 (*2) 8 (-8) 0 :letzte Überquerung

Zu Beginn betrug der Geldbetrag 14 Euro. Nach 3 Überquerungen sind es genau 0 Euro.

Für n = Anzahl der Überquerungen, g = Kosten für eine Überquerung und f = Multiplikationsfaktor gilt allgemein ($n \geq 1, f \geq 1$):

$$\text{Startbetrag } x = K(n, f) * g \quad \text{mit} \quad K(n, f) = \frac{f^{(n-1)} + \dots + f + 1}{f^{(n-1)}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f^i}{f^{(n-1)}}$$

$$\text{Beispiel: } K(3, 2) = \frac{2^2 + 2^1 + 2^0}{2^2} = \frac{4 + 2 + 1}{4} = \frac{7}{4}$$

Werte für $K(n, f)$:

n	f	K(n,f)
2	2	3/2
2	3	4/3
2	4	5/4
2	5	6/5
2	6	7/6
3	2	7/4
3	3	13/9
3	4	21/16
3	5	31/25
3	6	43/36
4	2	15/8
4	3	40/27
4	4	85/64
4	5	156/125
4	6	259/216

Ein vollständiges Beispiel:

Es gibt 4 Brücken. Eine Überquerung kostet 13,50 €. Nach einer Überquerung wird der Betrag verdreifacht. Nach der 4. Brücke bleiben genau 0 € übrig.

Wie hoch war der Startbetrag x (€)?

$n=4$, $g=13,50$, $f=3$:

$$K(n,f) = K(4,3) = 40/27$$

$$x = K(n,f) * g = K(4,3) * 13,50 = 40/27 * 13,50 = 20,00$$

Ausprobieren:

20€ (-13,50) 6,50 (*3) 19,50 (-13,50) 6,00 (*3) 18,00 (-13,50) 4,50 (*3) 13,50 (-13,50) 0€

Eine weitere Möglichkeit der Berechnung ist die Methode Rückwärtsrechnen:

Bei $n=3$ Brücken, Kosten von $g=10€$ und dem Faktor $f=2$ ergibt sich:

Am Ende sind es 0€.

Davor waren es 10€ mehr. Und davor war es die Hälfte.

Diese Prozedur wird 3 mal wiederholt.

$$0 (+10,00) 10,00 (/2) 5,00 (+10,00) 15,00 (/2) 7,50 (+10,00) 17,50$$

Der Startbetrag war 17,50€.

Ausprobieren:

17,50€ (-10,00) 7,50 (*2) 15,00 (-10,00) 5,00 (*2) 10,00 (-10,00) 0€