

# Das Brückenproblem:

Zu Beginn hat eine Person  $x$  Euro. Die Person möchte  $n$  Brücken überqueren.

Das Überqueren einer Brücke kostet  $g$  Euro.

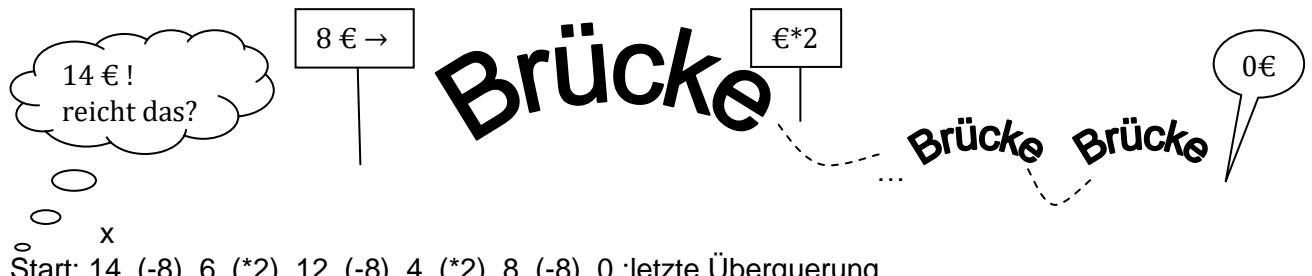
Nach dem Überqueren wird der aktuelle Geldbetrag mit dem Faktor  $f$  multipliziert.

Nach der letzten von  $n$  Überquerung bleiben genau 0 Euro übrig.

Wie hoch war der Geldbetrag  $x$  vor der ersten Überquerung?

Beispiel:  $n=3, f=2, g=8 \rightarrow x=14$ :

Es werden 3 Brücken überquert, eine Überquerung kostet 8 Euro, nach einer Überquerung wird der Geldbetrag mit 2 multipliziert (verdoppelt):



Zu Beginn betrug der Geldbetrag 14 Euro. Nach 3 Überquerungen sind es genau 0 Euro.

Für  $n =$  Anzahl der Überquerungen,  $g =$  Kosten für eine Überquerung und  $f =$  Multiplikationsfaktor gilt allgemein ( $n \geq 1, f \geq 1$ ):

$$\text{Startbetrag } x = K(n,f) * g \quad \text{mit } K(n,f) = \frac{f^{(n-1)} + \dots + f + 1}{f^{(n-1)}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f^i}{f^{(n-1)}}$$

$$\text{Beispiel: } K(3,2) = \frac{2^2 + 2^1 + 2^0}{2^2} = \frac{4 + 2 + 1}{4} = \frac{7}{4}$$

Werte für  $K(n,f)$ :

<b>n</b>	<b>f</b>	<b>K(n,f)</b>
2	2	3/2
2	3	4/3
2	4	5/4
2	5	6/5
2	6	7/6
3	2	7/4
3	3	13/9
3	4	21/16
3	5	31/25
3	6	43/36
4	2	15/8
4	3	40/27
4	4	85/64
4	5	156/125
4	6	259/216

### **Ein vollständiges Beispiel:**

Es gibt 4 Brücken. Eine Überquerung kostet 13,50 €. Nach einer Überquerung wird der Betrag verdreifacht. Nach der 4. Brücke bleiben genau 0 € übrig.

Wie hoch war der Startbetrag x (€)?

n=4, g=13,50, f=3 :

$$K(n,f) = K(4,3) = 40/27$$

$$x = K(n,f) * g = K(4,3) * 13,50 = 40/27 * 13,50 = 20,00$$

Ausprobieren:

20€ (-13,50) **6,50** (\*3) **19,50** (-13,50) **6,00** (\*3) **18,00** (-13,50) **4,50** (\*3) **13,50** (-13,50) 0€

### **Eine weitere Möglichkeit der Berechnung ist die Methode Rückwärtsrechnen:**

Bei n=3 Brücken, Kosten von g=10€ und dem Faktor f=2 ergibt sich:

Am Ende sind es 0€.

Davor waren es 10€ mehr. Und davor war es die Hälfte.

Diese Prozedur wird 3 mal wiederholt.

$$0 (+10.00) 10.00 (/2) 5,00 (+10.00) 15,00 (/2) 7,50 (+10.00) 17,50$$

Der Startbetrag war 17,50€.

Ausprobieren:

17,50€ (-10,00) **7,50** (\*2) **15,00** (-10,00) **5,00** (\*2) **10,00** (-10,00) 0€