

Zerlegung von Bruchzahlen in Stammbrüche 21.08.2026

Ein Stammbruch ist ein Bruch in der Form: $\frac{1}{n}$ (n : natürliche Zahl > 0)

Jede Bruchzahl lässt sich als eine Summe von Stammbrüchen ausdrücken. Dabei gibt es aber ein Problem: diese Darstellung ist nicht eindeutig.

So z.B. kann die 1 als: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ oder als: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ dargestellt werden.

Es gibt eine Methode, beliebig (unendlich) viele Darstellungen einer Bruchzahl als Summe von Stammbrüchen zu erzeugen.

Dafür entwickeln wir zuerst eine Formel zur Umformung eines Stammbruchs in eine Summe zweier Stammbrüche:

Wir beginnen mit $\frac{1}{n}$.

Wir erweitern Zähler und Nenner mit $(n+1)$:

$$\frac{1 \cdot (n+1)}{n \cdot (n+1)} = \frac{n+1}{n \cdot (n+1)}.$$

Weil der Nenner jeweils gleich ist trennen wir die Summanden des Zählers und kürzen:

$$\frac{n+1}{n \cdot (n+1)} = \frac{\textcolor{green}{n}}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Wir fassen zusammen:

Allgemeine Formel zur Zerlegung eines Stammbruchs in eine Summe zweier Stammbrüche mit $n \geq 1$:

$$\boxed{\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \cdot (n+1)}}$$

Zudem gilt mit $n \geq 1, a \geq 1$:

$$\boxed{\frac{1}{n} = \frac{1}{a \cdot n} + \frac{1}{a \cdot n} + \dots \text{ (a mal) } .}$$

Beispiel: $n=2, a=3$: $\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

Jetzt wenden wir Formel am Beispiel $1 = \frac{1}{1}$ an:

Formel: $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n*(n+1)}$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1*(1+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Wir wandeln jetzt immer wieder den kleinsten Stammbruch um:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2*(2+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6+1} + \frac{1}{6*(6+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1806}$$

... usw.

Diese Prozedur kann nun beliebig oft wiederholt werden.

Wir machen eine Probe mit der letzten Zeile:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1806} = \frac{903}{1806} + \frac{602}{1806} + \frac{258}{1806} + \frac{42}{1806} + \frac{1}{1806} = \frac{1806}{1806} = 1. \quad \text{☺}$$

Wie können allgemeine Brüche behandelt werden?

Der Bruch wird entsprechend seines Zählers in Stammbrüche aufgeteilt und dann wie oben verfahren.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \dots \quad (a \text{ mal } \frac{1}{b} \text{ addieren})$$

Beispiel:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} \quad \text{usw.}$$

Mit einer Erweiterung eines Bruches mit $n = 2, 3, 4, \dots$ können weiterhin beliebig viele neue Zerlegungen erzeugt werden.

Beispiel: $n=2: \frac{3}{5} = \frac{3*2}{5*2} = \frac{6}{10}$

$$\frac{6}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} =$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{110} \quad \text{usw.}$$

Beispiel: $n=3: \frac{3}{5} = \frac{3*3}{5*3} = \frac{9}{15}$

$$\frac{9}{15} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} =$$

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{240} \quad \text{usw.}$$

Eine weitere Möglichkeit zur Zerlegung ist die wiederholte Abspaltung von möglichst großen Stammbrüchen.

Dazu werden nachfolgende Schritte so lange wiederholt, bis am Ende nur noch ein Stammbruch übrig bleibt:

1. Vom Bruch $\frac{a}{b}$ wird ein möglichst großer Stammbruch $\frac{1}{k}$ abgezogen.

2. Daraus entsteht dann der Term: $\frac{1}{k} + \frac{a*k-b}{b*k}$

3. Falls $a*k-b = 1$ ist, sind wir fertig.

Ansonsten machen wir weiter bei 1. mit $a_{\text{neu}} = a*k-b$ und $b_{\text{neu}} = b*k$

Beispiel: $\frac{2}{5}$; $k = 3$, da $\frac{1}{3}$ der größte Stammbruch kleiner $\frac{2}{5}$ ist.

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2*3-5}{5*3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

Beispiel: $\frac{3}{5}$; $k = 2$, da $\frac{1}{2}$ der größte Stammbruch kleiner $\frac{3}{5}$ ist.

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3*2-5}{5*2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$$

Beispiel: $\frac{4}{5}$; $k = 2$, da $\frac{1}{2}$ der größte Stammbruch kleiner $\frac{4}{5}$ ist.

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{4*2-5}{5*2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} . \quad k = 4 \text{ für } \frac{3}{10}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3*4-10}{10*4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{40} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} .$$

Ausblick:

Es gibt derzeit kein systematisches Verfahren, welches alle Zerlegungen eines Bruches in Stammbrüche findet. Durch Probieren können alle Zerlegungen mit einer bestimmten Anzahl von Stammbrüchen gefunden werden.